ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Βλέπε απόδειξη Σελ. 262, σχολικού βιβλίου

Α2. Βλέπε ορισμό Σελ. 141, σχολικού βιβλίου

Α2.Βλέπε διατύπωση θεωρήματος Σελ. 246 και γεωμετρική ερμηνεία Σελ. 247 σχολικού βιβλίου

Α4.

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Το πρόσημο της f' φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

X	$-\infty$ 0	$+\infty$
f′	$-$	$+$
f	↘	↗

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 0 ίσο με $f(0)=0$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{(2x)'\left(x^2+1\right)^2-(2x)\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2\cdot x\cdot 2\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$\frac{2\left(x^2+1\right)^2-4x\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\left(x^2+1\right)-4x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-6x^2+2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2\left(-3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Λύνουμε την εξίσωση,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(-3x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow -3x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{1}{\sqrt{3}} \;\; ή \;\; x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3} \;\; ή \;\; x=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad +\infty$
f″	−	+	−
f	∩	∪	∩

Επομένως η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Τα σημεία καμπής της συνάρτησης είναι τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

Β3.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Θα μελετήσουμε αν η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

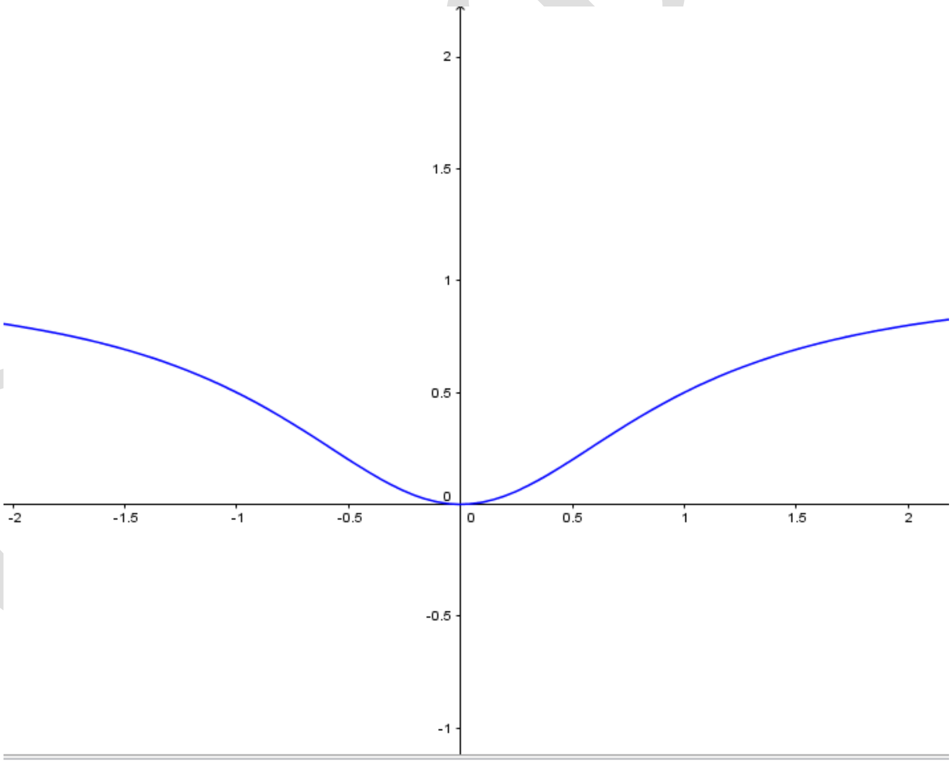
Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=1$.

Είναι $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=1$.

Β4. Φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f′′		−	0	−	0	+	0	+	
f		−		+		+		−	
f		↘		↘		↗		↗	

Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα Β1,Β2,Β3 η γραφική παράσταση της f είναι



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, x$\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\mathrm{e}^{x^2}x-2x=2x\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\mathrm{e}^{x^2}-1=0\Leftrightarrow x=0$.

Είναι $x^2\geq 0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ οπότε $\mathrm{e}^{x^2}\geq e^0=1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}-1\geq 0$

Άρα το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του 2x και φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

Επειδή η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0, το f(0) = 0 έχουμε f(x) ≥ 0 για κάθε x$\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0 άρα η εξίσωση f(x) =0 έχει μοναδική ρίζα το x_0 =0.

Γ2.

Από τη σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ έχουμε ισοδύναμα $|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως

Αν $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$$

Αν $x \in (-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως,

Αν $x \in (0, +\infty)$ και $f(x) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)$$

Αν $x \in (0, +\infty)$ και $f(x) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Συνεπώς προκύπτουν οι εξής συνδυασμοί για τον τύπο της f

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right),\ x \in \mathbb{R}$

ή $f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Γ3.

Από το Γ1 παραγωγίζοντας τη πρώτη παράγωγο της f έχουμε

$$f''(x) = 4\mathrm{e}^{x^2} x^2 + 2\mathrm{e}^{x^2} - 2,\ x \in \mathbb{R}$$

Ισχύει ότι

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow 2e^{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow 2e^{x^2} - 2 \geq 0 \ (1)$$
$$\text{και } 4\mathrm{e}^{x^2} x^2 \geq 0 \ (2)$$
$$\text{Οπότε από } (1) + (2) \text{ προκύπτει } 4\mathrm{e}^{x^2} x^2 + 2\mathrm{e}^{x^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0, οπότε η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4.

Για την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x) \quad (1)$

Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x)=f(x+3)-f(x)$ στο $[0,+\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$,

με $g'(x)=f'(x+3)\cdot(x+3)'-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

Για τη μονοτονία της f' έχουμε ότι για

$$x<x+3 \overset{f'\nearrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x+3) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0$$

οπότε $g'(x)>0$ και συνεπώς η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα και ΄΄1–1΄΄ οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$g(|\eta\mu x|)=g(x) \overset{g\,\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow x=0$$

Αφού από τη θεωρία έχουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ και για x ≥ 0 ισχύει $|\eta\mu x|\le x$ με την ισότητα να ισχύει για x=0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη σχέση $\int_0^\pi \left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\pi$ ισοδύναμα έχουμε,

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi \left(f'(x)\right)'\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)(\eta\mu x)'dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx-\left[f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi-f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right]_0^\pi+\int_0^\pi f(x)(\sigma\upsilon\nu x)'dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+f(\pi)-f(0)-\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$f(\pi)-f(0)=\pi \quad (1)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο x = 0.

οπότε $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \quad (2)$

Από τη δεδομένη σχέση $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$, θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$ με

$\lim_{x\to 0} g(x)=1$. Οπότε $f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$ και $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right)=1\cdot 0$

όπου λόγω της (2) έχουμε $f(0)=0$ (3).

Από τις σχέσεις (1) και (2) και (3) παίρνουμε τελικά $f(\pi)=\pi$

Για το f΄(0) έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

Άρα f΄(0) = 1

Δ 2α.

Παραγωγίζοντας τη σχέση $e^{f(x)} + x = f\left(f(x)\right) + e^x$ για κάθε x$\in \mathbb{R}$ η οποία αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις

έχουμε

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) + e^x \qquad (1)$$

Έστω ότι η f έχει ακρότατο στη θέση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$,

από το Θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_0) = 0$ (2).

οπότε η σχέση (1) για x = x_0 γίνεται

$$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$$

οπότε $f'(0) = 0$ ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(0) = 1$

Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

Δ 2Β.

Επειδή

- η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε x$\in \mathbb{R}$

- η f΄ είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

επομένως η f΄ θα διατηρεί το πρόσημο της. Επιπλέον f΄(0) = 1 > 0, άρα f΄(x) > 0 οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ισχύει ότι $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\le|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|\le 1+1=2$

Άρα $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\dfrac{2}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\dfrac{2}{|f(x)|}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{|f(x)|}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{|f(x)|}\right)$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4. Για το $\int_1^{e^\pi}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx$ θέτουμε $\ln x=u$. Άρα $\dfrac{1}{x}dx=du$.

Για x=1 είναι $u=\ln 1=0$ ενώ,

για $x=e^\pi$ είναι $u=\ln e^\pi=\pi$,

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γίνεται $\int_1^{e^\pi}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=\int_1^{\pi}f(u)du=\int_1^{\pi}f(x)dx$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,π] και γνησίως αύξουσα άρα $f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\pi$.

Άρα $f(x)\ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0, οπότε $\int_0^{\pi}f(x)>0$ (1).

Επίσης $\pi-f(x)\ge 0$ και η συνάρτηση $\pi-f(x)$ είναι συνεχής στο [0,π] και δεν μηδενίζεται παντού, αλλά μόνο στο x=π.

Άρα $\int_0^{\pi}(\pi-f(x))dx>0\Leftrightarrow\int_0^{\pi}\pi>\int_0^{\pi}f(x)dx\Leftrightarrow\int_0^{\pi}f(x)dx<\pi(\pi-0)=\pi^2$ (2).

Επομένως από (1),(2) προκύπτει $0<\int_0^{\pi}f(x)dx<\pi^2$.