ΜΕΘΟΔΙΚΟ

Προτεινόμενα Θέματα

Μαθηματικά – Γ' Λυκείου

2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$. Τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι η μέγιστη τιμή της f.

β. Αν μία συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

γ. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

δ. Για μια συνεχή συνάρτηση f ισχύει:

$$\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^2 f(x)\,dx = 0$$

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 1 \\ e^{1-x}, x > 1 \end{cases}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 8

Β3. Δίνεται το σημείο $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ με $x_0 < 1$. Να βρείτε το x_0, αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο M, διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$. Ποιο είναι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 7

Β4. Να λύσετε στο διάστημα: $[0,+\infty)$ την εξίσωση $f(x) = 1 + (x-1)^{2024}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 0$ και $f'(1) < 0$. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\big(f(x)\big) = 2x - f(x)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Αν η συνάρτηση $h = f' \circ f$ είναι σταθερή, να βρεθεί ο τύπος $f(x)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\ln x - 1)\cdot x - \ln x$, $x \in (0,+\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,+\infty)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α. $f(x_0) = 1 - x_0 - \frac{1}{x_0}$

β. $f(x_0) < -1$

Μονάδες (4+2)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) + x = f(x_0)$, είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{x+1}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$, έστω x_1 και x_2, με $x_1 < 1 < x_2$ και $x_1 x_2 = 1$.

Στη συνέχεια να δείξετε ότι:

α. Η εξίσωση $f'(x) + f(x) = 1$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2).

β. Αν είναι $\alpha > 0$ και ισχύει $f(x) \geq f(\alpha)\cdot(1-x) - 1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε θα είναι $\alpha = x_1$ ή $\alpha = x_2$.

γ. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{x_1-1}{x_2-1}$ ή $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < -x_1$.

Μονάδες 6

Δ4. Έστω F μια αρχική της f στο $(0,+\infty)$ και η συνάρτηση:

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + f(x_0)\cdot x + f(x_0), x \in \mathbb{R}.$$

Αν ε_1 είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο της $A\big(\xi_1, F(\xi_1)\big)$ και ε_2 είναι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B\big(\xi_2, g(\xi_2)\big)$ και ισχύει $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, να βρείτε τα ξ_1 και ξ_2.

Μονάδες 3

Δ5. Έστω Ε το εμβαδό του χωρίου, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = 1$. Να αποδείξετε ότι $E < \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 2)$

Μονάδες 3

Δ6. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{x(\ln x - 1) - f(x)}{x^2 + 1} dx = 0$$

Μονάδες 3

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 144

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 76

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 95

Α4. **α.** Σωστό **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{1-x} = 1$

Εφόσον $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Στη συνέχεια έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = 2$$

και $$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{1-x}}{x - 1} \underset{Dl'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1^-} (-\, e^{1-x}) = -1$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

Β2. Για $x < 1$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x$. Για το πρόσημο της παραγώγου έχουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Για $x > 1$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -e^{1-x} < 0$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, αλλά όμως είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Έτσι έχουμε στον πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\nmid$	$-$	
f		$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$. Παρουσιάζει για $x = 0$, τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$ και για $x = 1$, τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1$.

Β3. Για $x < 1$ είναι $f'(x) = 2x$ και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - {x_0}^2 = 2x_0(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0 x - {x_0}^2$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, οπότε $-1 = 2x_0 \cdot 0 - {x_0}^2 \Leftrightarrow {x_0}^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$, αφού το $x_0 < 1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -2x - 1$ και αυτή τέμνει τον $x'x$ στο $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και τον $y'y$ στο $B(0, -1)$. Άρα, το ζητούμενο εμβαδό είναι: $(OAB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$τ.μ.

Β4. Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 1$, και η ισότητα μόνο για $x = 1$.

Άρα $f(x) = 1 + (x-1)^{2024} \Leftrightarrow f(x) - 1 = (x-1)^{2024} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f(x) - 1 = 0 \\ (x-1)^{2024} = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 2 - f'(x)$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Τότε, όμως, θα έχουμε: $f'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = 2 - f'(x_0) \Leftrightarrow 0 = 2$, που είναι άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αφού $f'(1) < 0$ θα είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και τελικά η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε: $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$, όπου $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$, $f\big(f(1)\big) = 2 - f(1) \Leftrightarrow f(0) = 2$.

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $g(0) = f(0) = 2 > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε να ισχύει $g(x_0) = 0$. Όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το x_0 είναι μοναδική ρίζα για την εξίσωση $g(x) = 0$ στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(x) = f'\big(f(x)\big) = c$, (1) και ακόμα

$$f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 2 - f'(x).$$

Άρα για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει:

$$f'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) = 2 - f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot f'(x_0) = 2 - f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x_0)]^2 + f'(x_0) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \text{ ή } f'(x_0) = -2$$

Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) < 0$, παίρνουμε τελικά ότι $f'(x_0) = -2$.

Από τη σχέση (1) για $x = x_0$ προκύπτει: $f'(f(x_0)) = c_1 \Leftrightarrow f'(x_0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'\big(f(x)\big) = -2$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$-2f'(x) = 2 - f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow f(x) = 2x + c_2, \text{ με } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 1$ είναι $c_2 = 2$, άρα τελικά $f(x) = -2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Για κάθε $x > 0$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 1 + (\ln x - 1) - \frac{1}{x} = \ln x - \frac{1}{x}$
και $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (0, +\infty)$ και άρα

$f'(\Delta) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, όπου περιέχεται το 0.

Οπότε υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Ισχύουν:

- $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$
- $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$, το $f(x_0) = (\ln x_0 - 1)x_0 - \ln x_0$.

Στη συνέχεια έχουμε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$

Άρα, ισχύει $f(x_0) = (x_0 - 1) \cdot \frac{1}{x_0} - x_0 = 1 - x_0 - \frac{1}{x_0}$.

β. Είναι $f'(1) = -1$ και άρα $f'(x_0) > f'(1) \Leftrightarrow x_0 > 1$, αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$ και αφού $x_0 > 1$, θα είναι $f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < -1$.

Δ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται: $2f(x) + x = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) + x = f(x_0) - f(x)$, (1).

Η f είναι κυρτή συνάρτηση στο $(0, +\infty)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1) = -1)$ είναι

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x.$$

Επομένως για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \geq -x \Leftrightarrow f(x) + x \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επιπλέον για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - f(x) \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$. Οπότε από την εξίσωση:

(1)$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + x = 0 \\ f(x_0) - f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_0 \end{cases}$, και είναι αδύνατη αφού $x_0 > 1$.

Δ3.

α. Έχουμε: $x^{x-1} = e^{x+1} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = x + 1 \Leftrightarrow x\ln x - \ln x - x = 1$
$\Leftrightarrow (\ln x - 1)x - \ln x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, x_0]$ και άρα $f(\Delta_1) = \left(f(x_0), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [f(x_0), +\infty)$, όπου περιέχεται το 1, αφού είναι $f(x_0) < -1$.

Άρα υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει $f(x_1) = 1$ και αφού $f(x_0) \neq 1$ θα είναι $x_1 < x_0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [x_0, +\infty)$ και άρα $f(\Delta_2) = [f(x_0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [f(x_0), +\infty)$, όπου περιέχεται το 1.

Επομένως, υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ και μάλιστα μοναδικό, ώστε να ισχύει: $f(x_2) = 1$ και είναι $x_2 > x_0$.

Επιπλέον έχουμε $f(1) = -1$ και $f(x_1) = 1$ και άρα $f(x_1) > f(1) \Leftrightarrow x_1 < 1$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, x_0]$.

Στη συνέχεια έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x_2}\right) = \left(\ln\frac{1}{x_2} - 1\right)\cdot\frac{1}{x_2} - \ln\frac{1}{x_2} = (-\ln x_2 - 1)\cdot\frac{1}{x_2} + \ln x_2$$
$$= \frac{x_2\ln x_2 - \ln x_2 - 1}{x_2} = \frac{(x_2+1) - 1}{x_2} = \frac{x_2}{x_2} = 1.$$

Άρα το $\frac{1}{x_2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 1$.

Όμως $x_2 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} < 1$ και τελικά είναι $\frac{1}{x_2} = x_1 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1$.

Στη συνέχεια:

α. Η εξίσωση $f'(x) + f(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) + f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$ με $\varphi(x) = f'(x) + f(x) - 1$, $x \in (0,+\infty)$. Η φ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με $\varphi(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 1 = f'(x_1) < 0$ και $\varphi(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 1 = f'(x_2) > 0$.

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2).

β. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $f(x) \geq f(\alpha)(1-x) - 1$
$\Leftrightarrow f(x) + (x-1)f(\alpha) \geq -1 \Leftrightarrow g(x) \geq -1$
$\Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$, με $g(x) = f(x) + (x-1)f(\alpha)$, $x > 0$.

Η g έχει ελάχιστο για $x = 1$ και σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:
$g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) + f(a) = 0 \Leftrightarrow -1 + f(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 1 \Leftrightarrow a = x_1$ ή $a = x_2$

γ. Είναι $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} > 2$, αφού είναι x_1 θετικός $\neq 1$, και άρα $\frac{x_1+x_2}{2} > 1$.

Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στα διαστήματα $\left[1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ εξασφαλίζουμε $\rho_1 \in \left(1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ και $\rho_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$, ώστε να ισχύουν

$$f'(\rho_1) = \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - 1} = 2 \cdot \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 1}{x_1 + x_2 - 2}$$

και

$$f'(\rho_2) = \frac{f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} = 2 \cdot \frac{1 - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0, +\infty)$, και αφού $\rho_1 < \rho_2$, θα είναι

$$f'(\rho_1) < f'(\rho_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 1}{x_1 + x_2 - 2} < \frac{1 - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1) f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + x_2 - x_1 < x_1 + x_2 - 2 - (x_1 + x_2 - 2) f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow 2(x_2 - 1) f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 2(x_1 - 1)$, και τελικά είναι

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{x_1 - 1}{x_2 - 1} = \frac{x_1 - 1}{\frac{1}{x_1} - 1} = \cdots = -x_1$$

Δ4.

Για κάθε $x \in (0, +\infty), F'(x) = f(x) \geq f(x_0)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -x^2 + f(x_0) \leq f(x_0)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα είναι $F'(\xi_1) \geq f(x_0)$ και $g'(\xi_2) \leq f(x_0)$, οπότε

$F'(\xi_1) = g'(\xi_2) \Leftrightarrow F'(\xi_1) = f(x_0)$ και $g'(\xi_2) = f(x_0) \Leftrightarrow \xi_1 = x_0$ και $\xi_2 = 0$

Δ5. Για το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = 1$ έχουμε:

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - 1| \, dx$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - 1$, $x \in (0, +\infty)$.

Είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$.

Η h είναι συνεχής συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ και συνεπώς θα διατηρεί πρόσημο στο διάστημα (x_1, x_2),και αφού

$h(1) = f(1) - 1 = -2 < 0$, θα είναι $h(x) < 0$, $x \in (x_1, x_2)$.

Τελικά για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ είναι $h(x) \leq 0$, οπότε

$$E = \int_{x_1}^{x_2} (1 - f(x)) \, dx = x_2 - x_1 - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \,, \qquad (1)$$

Για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ισχύει $f(x) \geq -x$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.
Άρα,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > \int_{x_1}^{x_2} -(x)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}, \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$x_2 - x_1 - E > \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} \Leftrightarrow E < x_2 - x_1 - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}$

$\Leftrightarrow E < \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 2)$

Δ6. Το ολοκλήρωμα έχει τελικά την μορφή:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\ln x}{x^2 + 1}\,dx$$

με την αντικατάσταση $\frac{1}{x} = u$, οπότε: $-\frac{1}{x^2}dx = du$ και για τα άκρα του ολοκληρώματος:

$x = x_1, u = \frac{1}{x_1} = x_2$ και $x = x_2, u = \frac{1}{x_2} = x_1$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_{x_2}^{x_1} \frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2} + 1} \cdot \frac{1}{u^2}\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\ln x}{x^2 + 1} = -I$$

και τελικά $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$.

Ευχόμαστε καλή δύναμη & επιτυχία!